Cecilia Violeta RĂDUINEA

Grupuri finite.
Enumerarea grupurilor
de ordin mai mic sau egal cu 12

Lucrare metodico-ştiinţifică

- Elemente de teoria grupurilor
- Grupuri finite
- Grupuri finite de ordin mai mic sau egal cu 12
- Consideraţii metodice

Cecilia Violeta RĂDUINEA

Grupuri finite. Enumerarea grupurilor de ordin mai mic sau egal cu 12

Lucrare metodico-ştiinţifică

- Elemente de teoria grupurilor
- Grupuri finite
- Grupuri finite de ordin mai mic sau egal cu 12
- Consideraţii metodice

BUCUREŞTI

Descrierea CIP a Bibliotecii Naţionale a României
RĂDUINEA, CECILIA VIOLETA
Grupuri finite : enumerarea grupurilor de ordin mai mic sau egal cu 12, elemente de teoria grupurilor, grupuri finite, grupuri finite de ordin mai mic sau egal cu 12 : consideraţii metodice / Cecilia Violeta Răduinea. - Bucureşti : Pro Universitaria, 2014
Bibliogr.
ISBN 978-606-647-916-5

512.542

Referent ştiinţific:
Lect. Univ. dr. Chiteş Costel-Dobre

Argument

Algebra este una din ramurile cele mai importante ale matematicii, ce a cunoscut în ultimul timp o dezvoltare foarte mare. Problematica de care se ocupă a devenit mai vastă şi mai variată. Totodată ea constituie pentru matematicieni şi alţi specialişti un instrument de cercetare necesar şi eficace.

În această lucrare este prezentat un studiu asupra grupurilor, noţiunea de grup fiind introdusă de Galois în anul 1830. Ea îşi are originea în încercarea de rezolvare a ecuaţiilor polinomiale prin radicali datorate lui Lagrange, continuând cu studierea grupurilor de transformări apărută odată cu studiul geometriei neeuclidiene.

Aplicaţii ale teoriei grupurilor au fost folosite de fizica modernă şi pentru a explica fenomene din lumea artelor, în arte plastice (arabescurile Alhambrei, gravurile lui Mauritius Escher), muzică. Adjectivul "abelian" derivă de la numele celebrului matematician norvegian Niels Abel (1802-1829).

Teoria grupurilor constă în a degaja din definiţia grupului toate consecinţele posibile. Se stabilesc astfel teoremele la care se poate face referire de fiecare dată când în cursul studiului se întâlneşte o structură de grup. Rolul teoriei grupurilor în matematică se poate ilustra prin comparaţia următoare: boala M se manifestă sub forma unei mulţimi de fenomene $F=\{F_1, F_2, \ldots, F_n\}$. Printre acestea sunt unele care sunt determinante, adică acelea care sunt suficiente pentru a asigura existenţa bolii M; fie F'={ F_1', F_2', …, F_k'} mulţimea acestor simptome, care este o submulţime a lui F. Atunci când medicul a constatat prezenţa lor, el este în măsură să afirme că celelalte manifestări ale bolii (care aparţin complementarei lui F' în F) vor apărea şi în consecinţă să stabilească o medicaţie adecvată.

Primul capitol al acestei lucrări , *Elemente de teoria grupurilor,* cuprinde elementele de bază ale structurilor algebrice monoid, grup, subgrup, proprietăţi importante ale acestora.

În capitolul II, *Grupuri finite,* sunt descrise grupurile ciclice, grupuri finite precum grupul permutărilor, grupul diedral, grupul cuaternionilor, grupul claselor de resturi modulo n.

Capitolul III, *Grupuri finite de ordin mai mic sau egal cu 12,* descrie grupurile de ordin 4,6,8,10 şi 12, enumerând în final toate grupurile finite de ordin mai mic sau egal decât 12.

Ultimul capitol, *Consideraţii metodice,* prezintă un set de probleme rezolvate şi două modele de proiecte didactice.

Cartea este adresată elevilor de liceu şi studenţilor care studiază matematica. Profesorii care predau această disciplină o pot folosi atât în activitatea lor la clasă, cât şi în pregătirea examenelor pentru obţinerea gradelor didactice.

Autoarea

Bucureşti,
ianuarie 2014

CAPITOLUL I

ELEMENTE DE TEORIA GRUPURILOR

I. 1. LEGI DE COMPOZIŢIE

Definiţia 1. Fie M o mulţime nevidă. O aplicaţie $*: M\times M\to M$ se numeşte lege de compoziţie internă pe mulţimea M dacă asociază fiecărei perechi $(x,y)\in M\times M$ un unic element $x*y\in M$. Elementul $x*y$ se numeşte compusul lui x cu y. Se pot folosi şi alte simboluri speciale ca: $\circ$, $\perp$, T, $\cup,\cap,\oplus,\otimes$, t, …

Vom numi $x\cdot y$ (sau simplu xy, fară nici un semn între x şi y) produsul şi x+y suma elementelor $x,y\in M$. În primul caz vom spune că legea este dată multiplicativ, iar în al doilea aditiv. Se înţelege că, în majoritatea cazurilor, aceste denumiri sunt convenţionale.

În general pe o mulţime M se pot defini mai multe operaţii. Când dorim să punem în evidenţă una dintre ele vom utiliza parantezele $(M,*)$ şi vom spune că operaţia $*$ conferă mulţimii M o structură algebrică.

Exemple cunoscute de legi de compozitie.

1. Adunarea şi înmulţirea în mulţimea $\mathbb{N}$ a numerelor naturale, în mulţimea $\mathbb{Z}$ a numerelor întregi, în mulţimea $\mathbb{Q}$ a numerelor raţionale, în mulţimea $\mathbb{R}$ a numerelor reale şi în mulţimea $\mathbb{C}$ a numerelor complexe.

2. Compunerea pe $\mathcal{F}(M)$ (mulţimea funcţiilor definite pe M cu valori în M) este aplicaţia $\circ$: $\mathcal{F}(M) \times \mathcal{F}(M) \to \mathcal{F}(M)$, $(f,g) \to f\circ g$.

3. Reuniunea pe $\mathcal{P}(M)$ (mulţimea părţilor lui M; reprezintă toate submulţimile lui M) este definită prin
$\cup : \mathcal{P}(M) \times \mathcal{P}(M) \to \mathcal{P}(M)$, $(A, B) \to A \cup B$

4. Intersecţia pe $\mathcal{P}(M)$ este definită prin
$\cap : \mathcal{P}(M) \times \mathcal{P}(M) \to \mathcal{P}(M)$, $(A, B) \to A \cap B$

5. Fie $n \geq 1$ un număr natural.
Pe mulţimea $Z_n=\{ \hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \ldots, \widehat{n-1} \}$ a claselor de resturi modulo n, definim urmatoarele operaţii algebrice:
$(\hat{a}, \hat{b})$=a·b (numită înmulţire) şi $(\hat{a}, \hat{b})$=a+b (numită adunare)
Vom arăta că adunarea este bine definită, adică nu depinde de alegerea reprezentanţilor: $\hat{a}=a_1$, $\hat{b}=b_1$, atunci $a \equiv a_1 (\mathrm{mod}\ n)$ şi $b \equiv b_1 (\mathrm{mod}\ n)$, adică $n|a-a_1$ şi $n|b-b_1$, de unde $n|[(a+b)-(a_1+b_1)]$, adică $a+b \equiv a_1+b_1 (\mathrm{mod}\ n)$, deci $\widehat{a+b} = a_1+b_1$. La fel se demonstrează că operaţia de înmulţire este bine definită pe $\mathbb{Z}_n$, adică dacă $\hat{a}=a_1$, $\hat{b}=b_1$, atunci $ab=a_1b_1$.

6. Adunarea pe $\mathcal{M}_n(C)$ (mulţimea matricelor pătratice de ordin n cu elemente numere complexe) este definită prin
$+: \mathcal{M}_n(C) \times \mathcal{M}_n(C) \to \mathcal{M}_n(C)$, $(A,B) \to A+B$.

7. Pe mulţimea $\mathbb{Z}$ a numerelor întregi, scăderea este operaţie algebrică. Ea este definită astfel: $S: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $S(x,y)=x+(-y)=x-y$.
De asemenea scăderea este operaţie algebrică şi pe $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$.

Contraexemplu

Pe mulţimea numerelor naturale $\mathbb{N}$, scăderea nu este operaţie algebrică, deoarece rezultatul acesteia nu este totdeauna un număr natural. Exemplu: 3-10=-7

3,10 numere naturale, dar -7 nu este număr natural.

Aplicaţie. Fie M o mulţime finită cu n elemente. Să se determine numarul legilor de compoziţie definite pe M.

Soluţie: Numărul aplicaţiilor φ: M x M→M este egal cu $|M|^{|M \times M|} = n^{n \cdot n} = n^{n^2}$, deci sunt n^{n^2} legi de compoziţie definite pe M.

I. 1. 1. PROPRIETĂŢI ALE LEGILOR DE COMPOZIŢIE

Vom enunţa câteva proprietăţi ale legilor de compoziţie cu ajutorul cărora se definesc structurile de bază din algebră.

P1. ASOCIATIVITATEA

O lege de compoziţie $*$: M x M→M, $(x,y) \to x * y$, se numeşte asociativă dacă $(x * y) * z = x * (y * z)$ $\forall$ x, y, z $\in$ M.

Observaţii:

a) În scrierea multiplicativă, condiţia de asociativitate se scrie $(xy)z = x(yz)$ $\forall$ x, y, z $\in$ M, iar în scrierea aditivă: $(x+y)+z = x+(y+z)$ $\forall$ x, y, z $\in$ M.

b) O lege $*$: M x M→M, $(x,y) \to x * y$ nu este asociativă dacă $\exists$ x, y, z $\in$ M pentru care $(x * y) * z \neq x * (y * z)$.

c) Dacă $x_1, x_2, \ldots, x_n \in$ M şi pe M legea $*$ este asociativă, atunci prin compunerea elementelor date (în acea ordine) înţelegem $x_1 * x_2 * \ldots * x_n$ element din M obţinut prin recurenţă. Pentru n=1 el este x_1.

Dacă am obţinut elementul $x_1*x_2*\ldots*x_{n-1}$, atunci
$x_1*x_2*\ldots*x_n = (x_1*x_2*\ldots*x_{n-1})*x_n$.
Dacă legea de compoziţie pe M este multiplicativă, atunci

$\prod_{i=1}^{n} x_i = x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n = (x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_{n-1}) \cdot x_n$, iar în notaţia aditivă în loc de produsul elementelor $x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n$ avem suma lor

$x_1+x_2+\ldots+x_n = \sum_{i=1}^{n} x_i$.

<u>Exemple şi contraexemple</u>

1) Operaţiile algebrice de adunare şi înmulţire pe $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ sunt asociative.

2) Compunerea funcţiilor este o operaţie algebrică asociativă.

3) Reuniunea şi intersecţia pe mulţimea părţilor unei mulţimi sunt operaţii algebrice asociative.

4) Adunarea şi înmulţirea pe $\mathbb{Z}_n$ sunt operaţii algebrice asociative. Într-adevăr, dacă $a,b,c \in \mathbb{Z}_n$, atunci

$$\hat{a}+(\hat{b}+\hat{c}) = \hat{a}+\widehat{b+c} = \widehat{a+(b+c)} = \widehat{(a+b)+c} = \widehat{a+b}+\hat{c} =$$
$$=(\hat{a}+\hat{b})+\hat{c}$$

$$\hat{a}\cdot(\hat{b}\cdot\hat{c}) = \hat{a}\cdot\widehat{bc} = \widehat{a(bc)} = \widehat{(ab)\cdot c} = \widehat{ab}\cdot\hat{c} = (\hat{a}\cdot\hat{b})\cdot\hat{c}$$

5) Scăderea numerelor nu este asociativă : $7-(2-5) \neq (7-2)-5$.

<u>P2. COMUTATIVITATEA</u>

O lege de compoziţie **: M x M→M, (x,y)→x***y, se numeşte comutativă dacă: $x*y = y*x \quad \forall x, y \in M$

În notaţia aditivă comutativitatea se scrie:
$x+y = y+x \quad \forall x, y \in M$

În notaţia multiplicativă, comutativitatea se scrie:
$x \cdot y = y \cdot x \ \forall x, y \in M$
Dacă legea nu este comutativă, se spune că este o lege algebrică necomutativă.

<u>Exemple şi contraexemple</u>

1) Operaţiile de adunare şi înmulţire pe $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ sunt comutative.
2) Reuniunea şi intersecţia pe $\mathcal{P}(M)$ sunt comutative.
3). Adunarea şi înmulţirea pe $\mathbb{Z}_n$ sunt comutative.
Într-adevar, dacă a, b $\in \mathbb{Z}_n$, atunci
$\hat{a}+\hat{b} = \widehat{a+b} = \widehat{b+a} = \hat{b}+\hat{a}$
$\hat{a}\cdot\hat{b} = \widehat{a \cdot b} = \widehat{b \cdot a} = \hat{b}\cdot\hat{a}$
4). Operaţia algebrică de compunere a funcţiilor nu este comutativă decât dacă M are un singur element.
5). Scăderea numerelor nu este comutativă:
$5 - 8 \neq 8 - 5$.

<u>P3. ELEMENT NEUTRU</u>

Spunem că elementul $e \in M$ este element neutru pentru operaţia $*: M \times M \to M$, dacă $e*x=x*e=x$, $\forall\ x \in M$.
Unicitatea elementului neutru:
Presupunem că e şi e' sunt elemente neutre pentru această operaţie algebrică.
Atunci avem: $e=e*e'=e'$. Deci elementul neutru, dacă există, este unic determinat.
Dacă folosim scrierea aditivă, elementul neutru se numeşte element nul sau elementul zero sau chiar zero şi se notează de