Cecilia Violeta RĂDUINEA

RECAPITULARE RAPIDĂ LA MATEMATICĂ

Pregătire pentru examenul de bacalaureat

- Breviar teoretic
- Exerciţii şi probleme
- Subiecte tip examen bacalaureat

(clasa a IX-a, clasa a X-a: Algebră, Geometrie, Trigonometrie)

Cecilia Violeta RĂDUINEA

RECAPITULARE RAPIDĂ LA MATEMATICĂ

Pregătire pentru examenul de bacalaureat

- **Breviar teoretic**
- **Exerciţii şi probleme**
- **Subiecte tip examen bacalaureat**
  (clasa a IX-a, clasa a X-a: Algebră, Geometrie, Trigonometrie)

PRO UNIVERSITARIA
BUCUREŞTI
2014

Descrierea CIP a Bibliotecii Naţionale a României
RĂDUINEA, CECILIA VIOLETA
Recapitulare rapidă la matematică : pregătire pentru examenul de bacalaureat : breviar teoretic, exerciţii şi probleme, subiecte tip examen de bacalaureat : (clasa a IX-a, clasa a X-a : Algebră, Geometrie, Trigonometrie) / Cecilia Violeta Răduinea. - Bucureşti : Pro Universitaria, 2014
Bibliogr.
ISBN 978-606-647-915-8

51(075.35)(076)(079.1)
371.279.8:373.5

Referent științific:
Lect. univ. dr. Giuclea Marius

I. BREVIAR TEORETIC

1. Mulţimi şi elemente de logică

<u>*Mulţimi de numere*</u>: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ (numere naturale, întregi, raţionale, respectiv reale), $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$;

<u>*Reguli de calcul*</u> cu numere reale vizând:

- asociativitatea: $a+(b+c)=(a+b)+c$; $a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c$, oricare ar fi $a,b,c\in\mathbb{R}$
- comutativitatea: $a+b=b+a$; $a\cdot b=b\cdot a$, oricare ar fi $a,b\in\mathbb{R}$
- elementul neutru: $a+0=0+a=a$; $a\cdot 1=1\cdot a=a$, oricare ar fi $a\in\mathbb{R}$
- elemente simetrizabile: $a+(-a)=(-a)+a=0$, oricare ar fi $a\in\mathbb{R}$; $a\cdot\frac{1}{a}=\frac{1}{a}\cdot a=1$, oricare ar fi $a\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$
- distributivitatea: $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$, oricare ar fi $a,b,c\in\mathbb{R}$
- alte proprietăţi: $a\cdot 0=0\cdot a=0$, oricare ar fi $a\in\mathbb{R}$.

<u>*Ordonarea numerelor reale*</u>: $a<b$;

Proprietăţi: 1. $a<b \Leftrightarrow a\cdot x<b\cdot x$, $\forall x>0$;

2. $a<b \Leftrightarrow a\cdot x>b\cdot x$, $\forall x<0$;

3. $a<b \Leftrightarrow a+x<b+x$, $\forall x\in\mathbb{R}$;

4. $a^2<b^2 \Leftrightarrow |a|<|b|$;

5. $a < b$ şi $b < c \Rightarrow a < c$ (tranzitivitate);

6. $a \le b$ şi $a \ge b \Leftrightarrow a = b$ (antisimetrie).

Modulul unui număr real

Se numeşte modulul sau valoarea absolută a numărului real a distanţa măsurată pe axa numerică de la origine la punctul corespunzător numărului a şi se notează $|a|$.

$$\text{Aşadar, } |a| = \begin{cases} a, & a \ge 0 \\ -a, & a < 0 \end{cases}.$$

Exemple: $|-3| = 3, |5| = 5, |-\sqrt{2}| = \sqrt{2}, \left|\frac{3}{4}\right| = \frac{3}{4}.$

Din definiţia modulului unui număr real rezultă cu uşurinţă următoarele proprietăţi:

1. $|a| \ge 0, \forall a \in \mathbb{R};$
2. $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0;$
3. $|a| = \max(-a, a);$
4. $|-a| = |a|, \forall a \in \mathbb{R};$
5. $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|, \forall a, b \in \mathbb{R};$
6. $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}, \forall a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}^*;$
7. $|a + b| \le |a| + |b|, \forall a, b \in \mathbb{R}$ (inegalitatea triunghiului);
8. $|a - b| \le |a| + |b|, \forall a, b \in \mathbb{R}$
9. $||a| - |b|| \le |a + b|, \forall a, b \in \mathbb{R};$
10. $||a| - |b|| \le |a - b|, \forall a, b \in \mathbb{R};$

11. $|a| \le c \Leftrightarrow -c \le a \le c$;

12. $|a| \ge c \Leftrightarrow a \le -c$ sau $a \ge c$

(inegalităţile de la 11. şi 12. se pot înlocui cu inegalităţi stricte).

13. $|a| = |b| \Leftrightarrow a = -b$;

14. $\sqrt{a^2} = |a|$.

<u>*Aproximări prin lipsă / adaos*</u>: de exemplu, utilizarea aproximărilor pentru încadrarea unui număr real între doi întregi consecutivi.

Exemplu:

Fie x=π=3,141592653589…

Aproximări zecimale prin lipsă	3	3,1	3,14	3,141	3,1415	3,14159	…
Aproximări zecimale prin adaos	4	3,2	3,15	3,142	3,1416	3,14160	…

Fie x= -π= -3,141592653589…

Aproximări zecimale prin lipsă	-4	-3,2	-3,15	-3,142	-3,1416	-3,14160	…
Aproximări zecimale prin adaos	-3	-3,1	-3,14	-3,141	-3,1415	-3,14159	…

Partea întreagă. Partea fracţionară a unui număr real

Se numeşte partea întreagă a numărului real x, numărul întreg n cu proprietatea că $x \in [n,n+1)$.

Partea întreagă se notează [x].

De exemplu : $[3,45]=3$; $[-2]=-2$; $[-\pi]= -4$; $[-5,79]= -6$

Se numeşte partea fracţionară a numărului real x, numărul real x-[x].

Partea fracţionară se notează {x}. Deci $\{x\}=x-[x]$.

De exemplu : $\{2\}=0$; $\{-5\}=0$; $\{3,3\}=0,3$; $\{-3,3\}=0,7$; $\{-\pi\}= 4-\pi$

Proprietăţi :

1. $[x]\le x<[x]+1, \forall x\in R$;
2. $x-1<[x]\le x, \forall x\in R$;
3. $x=[x]+\{x\}, \forall x\in R$;
4. $\{x\}\in [0,1), \forall x\in R$;
5. $[x+n]=[x]+n, \forall x\in R, n\in Z$;
6. $\{x+n\}=\{x\}, \forall x\in R, n\in Z$.

Intervale de numere reale:

$(a,b)=\{x\in \mathbb{R} / a<x<b\}$; $[a,b]=\{x\in \mathbb{R} / a\le x\le b\}$;

$(a,b]=\{x\in \mathbb{R} / a<x\le b\}$; $[a,b)=\{x\in \mathbb{R} / a\le x<b\}$;

$(-\infty,b)=\{x\in \mathbb{R} / x<b\}$; $(a,+\infty)=\{x\in \mathbb{R} / a<x\}$;

$(-\infty,b]=\{x\in \mathbb{R} / x\le b\}$; $[a,+\infty)=\{x\in \mathbb{R} / a\le x\}$.

Operaţii cu mulţimi de numere reale:

reuniune $A\cup B=\{x / x\in A \text{ sau } x\in B\}$;

intersecţie $A\cap B=\{x / x\in A \text{ şi } x\in B\}$;

diferenţă $A-B=\{x/ x\in A \text{ şi } x\notin B\}$;

complementara unui interval

$C_A(B)= \{x/ x\in A \text{ şi } x\notin B\}$;

<u>Operaţii logice elementare, cuantificatori</u>, exemple:

- negaţia unei propoziţii logice adevărate reprezintă o propoziţie logică falsă;
- utilizarea conjuncţiei a două predicate în rezolvarea de sisteme;
- utilizarea disjuncţiei a două predicate în abordarea rezolvării unei probleme pe cazuri;
- utlizarea implicaţiei sau echivalenţei în elaborarea argumentării logice într-o demostraţie;
- cuantificatorul universal ($\forall$) ,,oricare ar fi" sau ,,pentru oricare";
- cuantificatorul existenţial ($\exists$) ,,există" sau ,,există cel puţin"

2. Mulţimi de numere

<u>Puteri cu exponent întreg</u>: $a^n = \underbrace{a......a}_{\text{de n ori}}$ pentru $a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}^*$,

$a^0 = 1$, $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$ pentru $a \in \mathbb{R}^*, n \in \mathbb{N}$.

Proprietăţi:

1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$, 2. $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$,

3. $(ab)^m = a^m \cdot b^m$, 4. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^m = \dfrac{a^m}{b^m}$,

5. $\left(a^m\right)^n = a^{mn}$, cu aplicarea formulelor în condiţii de bună definire.

Media aritmetică a numerelor reale $a_1, a_2, ..., a_n$ este

$$m_a = \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}.$$

Media artimetică ponderată a numerelor reale $a_1, a_2, ..., a_n$, care au respectiv ponderile $p_1, p_2, ..., p_n$, este

$$m_{ap} = \frac{a_1 p_1 + a_2 p_2 + ... + a_n p_n}{p_1 + p_2 + ... + p_n}.$$

Media geometrică a două numere reale pozitive a şi b este

$$m_g = \sqrt{a \cdot b};$$

Media geometrică a trei numere reale pozitive a, b şi c este

$$m_g = \sqrt[3]{abc}.$$

Media armonică a două numere reale pozitive nenule a, b este

$$m_h = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}.$$

Inegalitatea mediilor:

$$\min\{a; b\} \le \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \le \sqrt{a \cdot b} \le \frac{a+b}{2} \le \max\{a; b\}$$, unde a şi b sunt numere reale pozitive nenule sau $m_h \le m_g \le m_a$.

Radical de ordin 2 dintr-un număr real pozitiv: $\sqrt{a}, a \ge 0$;

Proprietăţi:

1. $\sqrt{a^2} = |a|, \forall a \in \mathbb{R}$; 2. $\sqrt{a} \ge 0, \forall a \ge 0$,

3. $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}, \forall a, b \ge 0$; 4. $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}, \forall a \ge 0, \forall b > 0$;

5. $\left(\sqrt{a}\right)^m = \sqrt{a^m} = a^{\frac{m}{2}}$, $\forall a \geq 0, m \in \mathbb{N}^*$;

6. Raţionalizarea numitorului:

i) $\dfrac{1}{\sqrt{a}} = \dfrac{\sqrt{a}}{a}$, $\forall a > 0$,

ii) $\dfrac{1}{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}} = \dfrac{\sqrt{a} \mp \sqrt{b}}{a - b}$, $\forall a, b > 0$.

<u>*Radical de ordin 3*</u> dintr-un număr real: $\sqrt[3]{a}$, $a \in \mathbb{R}$;

Proprietăţi:

1. $\sqrt[3]{a^3} = \left(\sqrt[3]{a}\right)^3 = a$, $\forall a \in \mathbb{R}$;

2. $\sqrt[3]{ab} = \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b}$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$;

3. $\sqrt[3]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}$, $\forall a, b \in \mathbb{R}, b \neq 0$;

4. $\left(\sqrt[3]{a}\right)^m = \sqrt[3]{a^m} = a^{\frac{m}{3}}$, $\forall a \in \mathbb{R}, m \in \mathbb{N}^*$.

<u>*Logaritmi*</u>: Condiţii de existenţă pentru $\log_a x$:

$a > 0, a \neq 1, x > 0$;

Definiţie: $\log_a x = y \Leftrightarrow x = a^y$;

Proprietăţi:

1. $\log_a a^x = x$; 2. $a^{\log_a x} = x$;

3. $\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y$; 4. $\log_a \dfrac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$;

5. $\log_a x^m = m \log_a x$; 6. $\log_a b = 1/\log_b a$.