

Introducere

Lucrarea de față își propune să pună în evidență diverse tipuri de mișcări care sunt dinamic compatibile cu diferite reprezentări constitutive ale fluidelor ne-newtoniene.

În primul capitol, intitulat „**Legi constitutive**”, sunt precizate:

- clase de ecuații constitutive integrale: ecuația constitutivă a lui Lodge (vezi Lodge [12]), clasele de ecuații Kaye-BKZ (vezi Kaye [10] și Bernstein, Kearsley și Zapas [11]), ecuația constitutivă a lui Wagner (vezi Wagner [4]). Toate aceste ecuații constitutive sunt neliniare în raport cu câmpul de viteză și gradientii acestuia.

-legi constitutive de tip diferențial, cum ar fi fluidele de gradul II și III (introduse în lucrările lui Dunn și Fosdick [43], Fosdick și Rajagopal [63] și Țigoiu [62]) sau fluidul Oldroyd-B (introdus de Oldroyd [64] și discutat și în lucrările lui Larson [1]-[2]).

Pentru aceste clase constitutive, în capitolele următoare se analizează comportamentul materialelor pe clase de mișcări date.

În capitolul doi, „**Extrudarea fluidelor de tip Lodge**” este studiat procesul de extrudare al unui fluid de tip Lodge (vezi Lodge [12]), în ipoteza unui câmp de viteze Binding (vezi Binding [14]).

Fluidul de tip Lodge admite o reprezentare integrală cu trei constante de material, iar câmpul de viteze de tip Binding depinde de două funcții scalare.

Scopul este determinarea câmpului de viteze, stării de tensiune, vâscozității de forfecare, vâscozității elongaționale, debitului, timpului în care o particulă parcurge o linie de curent, elongației (valoarea medie a vitezei de alungire) și forței medii pe suprafața transversală de curgere. Sunt realizate reprezentări grafice ale mărimilor determinate pentru diferite valori ale constantelor de material.

În capitolul trei, „**Mișcări în reometrul ortogonal pentru unele clase de fluide ne-newtoniene**”, ne propunem să rezolvăm problemele de curgere pentru diverse tipuri de fluide, folosind dezvoltări asimptotice în raport cu parametri mici.

Pornind de la lucrările lui Rajagopal [22] și Rajagopal și Wineman [24], în care sunt determinate soluții exacte ale problemei la limită pentru un fluid incompresibil de gradul doi, respectiv pentru fluidul BKZ-cazul vâscoelasticității liniare pe istorii, în acest capitol sunt studiate curgerile în reometrul ortogonal pentru:

- fluidul BKZ-cazul potențialului Currie (expresie dată de Currie în [3]);
- fluidul Wagner (model introdus de Wagner [4]).

Pentru fluidele BKZ (model introdus de Bernstein, Kearsley și Zapas în [11]) și Wagner (vezi Wagner [4]) sunt determinate soluțiile asimptotice ale sistemului ecuațiilor de mișcare și sunt comparate cu soluțiile numerice ale ”sistemului principal” al ecuațiilor de mișcare.

Este pusă în evidență o teoremă de existență și unicitate a soluției problemelor bilocale discutate.

Pe această cale, doresc să mulțumesc: Prof. Dr. Sanda Țigoiu, Conf. Dr. Victor Țigoiu, Lect. Dr. Romeo Bercia, pentru îndrumările utile și sprijinul acordat în vederea finalizării acestei lucrări.

Listă de notații

- \mathbf{T} -tensorul de tensiune al lui Cauchy;
 $\boldsymbol{\sigma}$, \mathbf{T}_E -tensiunea efectivă;
 G -modul de rigiditate;
 $\mathbf{C}_t(\mathbf{x}, \tau) = \mathbf{F}_t^T(\mathbf{x}, \tau)\mathbf{F}_t(\mathbf{x}, \tau)$ -tensorul Cauchy - Green la dreapta în descrierea relativă;
 $\mathbf{F}_t(\mathbf{x}, \tau) = \nabla_{\mathbf{x}}\chi_t(\mathbf{x}, \tau)$ -gradientul deformației relative;
 $\mathbf{L}(\mathbf{x}, t) = \nabla\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ -gradientul vitezei;
 $\mathbf{D} = \frac{1}{2}(\mathbf{L} + \mathbf{L}^T)$ -tensorul viteză de deformație;
 $\mathbf{A}_k(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial^k}{\partial \tau^k}\mathbf{C}_t(\tau) |_{\tau = t}$ -tensorii Rivlin - Ericksen;
 $\boldsymbol{\delta}$, \mathbf{I} -tensorul identitate de ordinul doi;
 W -energie de deformare(energie liberă);
 U -potențialul energiei de deformare;
 I_1, I_2, I_3 -invarianții lui $\mathbf{C}_t(\tau)$;
 $h(I_1, I_2)$ -damping function;
 $\lambda, \lambda_1, \lambda_r$ -timpi de relaxare;
 p -presiunea hidrostatică;
 $\frac{\delta\boldsymbol{\sigma}}{\delta t} = \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \boldsymbol{\sigma}\mathbf{L} + \mathbf{L}^T\boldsymbol{\sigma}$ -derivata obiectivă a lui $\boldsymbol{\sigma}$;
 $\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{\partial\boldsymbol{\sigma}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)\boldsymbol{\sigma}$ -derivata materială a lui $\boldsymbol{\sigma}$;
 $m(t - \tau)$ -funcție de memorie;
 \mathbf{v} -viteza;
 \mathbf{a} -acelerația;
 \mathbf{b} -forțele masice;
 Ω -viteza de rotație;
 $\mu, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \beta_3$ -moduli constitutivi;
 η -vâscozitatea;
 ρ -densitatea;
 Re -numărul lui Reynolds;
 $Re_m, \alpha_m, \beta_m, \theta$ -parametrii adimensionali;
 div -operatorul divergență;
 tr -operatorul urmă;
 ∇ -operatorul gradient;

Capitolul 1

Legi constitutive

Pentru problemele analizate în această lucrare vom folosi diverse legi constitutive de tip integral și diferențial.

Pentru fiecare din problemele descrise se determină câmpul de viteze și starea de tensiune, pornind de la:

- forma locală a principiului de bilanț al impulsului: $\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \rho \mathbf{b} + \operatorname{div} \mathbf{T}$,

unde:

- ρ este densitatea,
- $\frac{d\mathbf{v}}{dt}$ este derivata materială a vitezei,
- \mathbf{b} sunt forțele masice,
- \mathbf{T} este tensorul tensiunii Cauchy,
- "div" este operatorul divergență;

- ecuația de continuitate a masei: $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$,

care corespunde mișcărilor izocore, singurele tipuri de mișcări care se realizează pentru fluide incompresibile.

1.1 Legi constitutive de tip integral

- Vom pune în discuție următoarele **legi constitutive de tip integral**:

- Ecuația constitutivă a lui Lodge (vezi Lodge [12]);
- Clasele de ecuații Kaye-BKZ (clase introduse de Kaye [10] și Bernstein, Kearsley și Zapas [11]) ;
- Ecuația constitutivă a lui Wagner (vezi Wagner [4]).

O serie de rezultate obținute pentru clase de fluide ne-newtoniene sunt prezentate în lucrarea lui Fetecău [40]. În această lucrare sunt studiate două clase de mișcări ale fluidelor simple de tip integral de ordinul întâi: mișcarea Poisseule generalizată și mișcarea elicoidală.

1.1.1 Ecuția constitutivă a lui Lodge

Presupunem că ne situăm în cadrul general din Larson [1]-[2]. Vâscoelasticitatea liniară este un model adecvat de studiere a curgerilor în care vitezele de deformare sunt mici. Considerăm ca punct de plecare ecuația lui Lodge, în care tensorul tensiunii efective are reprezentarea constitutivă de tip integral

$$\boldsymbol{\sigma} = G \int_{-\infty}^t \frac{1}{\lambda} \exp\left(\frac{\tau - t}{\lambda}\right) \mathbf{C}_t^{-1}(\tau) d\tau, \quad (1.1.1)$$

unde:

- $\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + \boldsymbol{\sigma}$ este tensorul de tensiune al lui Cauchy;
- $\boldsymbol{\sigma}$ este tensiunea efectivă;
- p este presiunea hidrostatică;
- G este modulul de rigiditate (constant);
- λ este timpul de relaxare (constant);
- $\mathbf{C}_t^{-1}(\tau) = \mathbf{F}_t^{-1}(\tau)(\mathbf{F}_t(\tau)^{-1})^T$ este tensorul lui Finger pe mișcarea relativă;
- $\mathbf{F}_t^{-1}(\tau) = \nabla_{\mathbf{x}'}\mathbf{x}$ tensorul gradient de deformare în mișcarea relativă (\mathbf{x}' -poziția la momentul τ a particulei care la momentul actual t este reprezentată prin \mathbf{x});

Dacă deformarea totală este mică, tensorul Finger poate fi exprimat prin relația

$$\mathbf{C}_t^{-1}(\tau) = \boldsymbol{\delta} + 2\boldsymbol{\gamma}_t(\tau), \quad (1.1.2)$$

unde

- $\boldsymbol{\delta}$ este tensorul unitate;
- $\boldsymbol{\gamma}$ este o măsură a deformabilității în particula materială într-un interval de timp

$$\boldsymbol{\gamma}(t, \tau) \equiv \int_{\tau}^t \mathbf{D}(t'') dt'', \quad (1.1.3)$$

unde \mathbf{D} este tensorul viteză de deformare.

Cu aceste considerații ecuația Lodge devine

$$\boldsymbol{\sigma} = 2 \int_{-\infty}^t m(t - \tau) \boldsymbol{\gamma}_t(\tau) d\tau, \quad (1.1.4)$$

unde nucleul de relaxare $m(t - \tau)$ este dat prin

$$m(t - \tau) = \frac{G}{\lambda} \exp \frac{\tau - t}{\lambda}.$$

Integrând prin părți obținem

$$\sigma = 2 \int_{-\infty}^t G(t - \tau) \mathbf{D}(\tau) d\tau, \quad (1.1.5)$$

unde

$$G(s) = \int_s^{\infty} m(s') ds'. \quad (1.1.6)$$

Prin intermediul nucleului G definim expresiile pentru $G'(\omega)$ (modulul de stocare) și $G''(\omega)$ (modulul de pierdere) în deformații oscilante de amplitudine mică ("small amplitude oscillatory deformations"):

$$G'(\omega) = \omega \int_0^{\infty} G(t) \sin \omega t dt, \quad (1.1.7)$$

$$G''(\omega) = \omega \int_0^{\infty} G(t) \cos \omega t dt. \quad (1.1.8)$$

unde ω reprezintă frecvența.

Comportamentul polimerilor topiți poate fi descris prin ecuația constitutivă (1.1.5).

1.1.2 Clasele de ecuații Kaye-BKZ

Se introduce energia de deformare W (numită și energie liberă), ca fiind o funcție de măsură a deformării elastice, de exemplu o funcție de \mathbf{C}^{-1}

$$W = W(\mathbf{C}^{-1}). \quad (1.1.9)$$

Pentru a respecta principiul obiectivității, W depinde de \mathbf{C}^{-1} prin intermediul invariantilor I_1, I_2, I_3 :

$$I_1 = \text{tr}(\mathbf{C}^{-1}),$$

$$I_2 = \frac{1}{2}((\text{tr} \mathbf{C}^{-1})^2 - \text{tr} \mathbf{C}^{-2}), \quad (1.1.10)$$

$$I_3 = \det(\mathbf{C}^{-1}).$$

De exemplu, în teoria clasică a elasticității cauciucului se consideră W dependentă de primul invariant al tensorului de deformare \mathbf{C}^{-1}

$$W = \frac{1}{2}G \text{tr} \mathbf{C}^{-1}, \quad (1.1.11)$$

unde G este o constantă de material. Pentru materiale incompresibile avem $\det(\mathbf{C}^{-1}) = 1$ și astfel W depinde numai de invariantii I_1 și I_2 , deci

$$W = W(I_1, I_2).$$

Pentru un corp elastic incompresibil, Larson [1]-[2] consideră următoarea reprezentare pentru $\boldsymbol{\sigma}$

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\left(\frac{\partial W}{\partial I_1} \mathbf{C}^{-1} - \frac{\partial W}{\partial I_2} \mathbf{C}\right). \quad (1.1.12)$$

Pentru fluide vâscoelastice Larson [1]-[2] presupune că W este o integrală pe istorie dintr-o funcție care depinde I_1, I_2 și τ , numită potențial,

$$W = \int_{-\infty}^t u(I_1, I_2, \tau) d\tau. \quad (1.1.13)$$

Tensorul tensiunii admite o reprezentare constitutivă de forma

$$\boldsymbol{\sigma} = 2 \int_{-\infty}^t \left[\frac{\partial u}{\partial I_1} \mathbf{C}_t^{-1}(\tau) - \frac{\partial u}{\partial I_2} \mathbf{C}_t(\tau) \right] d\tau. \quad (1.1.14)$$

Un tip de descompunere pentru funcția potențial $u(I_1, I_2, s)$ este

$$u(I_1, I_2, s) = m(s)U(I_1, I_2), \quad (1.1.15)$$

unde $m(s)$ se numește funcție de memorie.

Reprezentarea constitutivă de tip integral (1.1.14) împreună cu (1.1.15) capătă forma

$$\boldsymbol{\sigma} = 2 \int_{-\infty}^t m(t-\tau) \left[\frac{\partial U}{\partial I_1} \mathbf{C}_t^{-1}(\tau) - \frac{\partial U}{\partial I_2} \mathbf{C}_t(\tau) \right] d\tau, \quad (1.1.16)$$

numită **ecuația Kaye-BKZ**.