

MISCELLANEA

În acest capitol sunt prezentate diverse concepte matematice care nu sunt parte integrantă a Analizei Matematice, dar care sunt folosite în cadrul acesteia.

ELEMENTE DE LOGICĂ

CALCULUL CU PROPOZIȚII

Propoziția, adevărul și falsul - noțiuni primare Principalii operatori logici

Din punct de vedere logic o teorie științifică este un sistem de propoziții (enuțuri, legi, afirmații) adevărate sau considerate altfel. Logica nu se ocupă cu definirea noțiunii de propoziție și nici a adevărului sau falsului, toate acestea fiind considerate noțiuni primare (nedefinite).

Dacă o propoziție p este adevărată vom scrie $v(p) = 1$, iar dacă este falsă, $v(p) = 0$; simbolurilor 0 și 1 le vom spune valori de adevăr, primul desemnând falsul, iar cel de al doilea adevărul.

Cele mai simple propoziții sunt de forma "A este B". De exemplu: "Eminescu este autorul poeziei Luceafărul", "Balena este mamifer" etc. Pornind de la asemenea propoziții simple, prin conectări diverse, se obțin propoziții compuse. Logica își propune să studieze cum se transmit valorile de adevăr la propozițiile compuse, construite cu ajutorul operatorilor logici.

Principalii operatori logici sunt:

- 1) **negația**, notată cu non sau cu \neg sau cu $\bar{\quad}$ (în limbaj uzual NU).
- 2) **disjuncția**, notată cu \vee (în limbaj uzual SAU).
- 3) **conjuncția**, notată cu \wedge (în limbaj uzual ȘI).
- 4) **implicația**, notată cu \rightarrow (în limbaj uzual DACĂ..., ATUNCI...).
- 5) **echivalența**, notată cu \leftrightarrow (în limbaj uzual DACĂ ȘI NUMAI DACĂ).

Observații

1. Dacă p și q desemnează două propoziții, atunci avem:

$v(p)$	$v(q)$	$v(\bar{p})$	$v(p \vee q)$	$v(p \wedge q)$
1	1	0	1	1
1	0	0	1	0
0	1	1	1	0
0	0	1	0	0

și

$v(p)$	$v(q)$	$v(p \rightarrow q)$	$v(p \leftrightarrow q)$
1	1	1	1
1	0	0	0
0	1	1	0
0	0	1	1

2. $(p \wedge q)$ este $\overline{p \vee \overline{q}}$.
3. $(p \rightarrow q)$ este $(\overline{p} \vee q)$.
4. $(p \leftrightarrow q)$ este $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$.
5. $v(p \leftrightarrow q) = 1$ dacă și numai dacă $v(p) = v(q)$.
6. Dacă $v(p) = 0$, atunci $v(p \rightarrow q) = 1$, oricare ar fi propoziția q (se spune că falsul implică orice).
7. Dacă $v(q) = 1$, atunci $v(p \rightarrow q) = 1$, oricare ar fi propoziția p .
8. Pentru a afla valoarea de adevăr a implicației $p \rightarrow q$ este suficient să examinăm doar cazul $v(p) = 1$.

Definiție. O propoziție compusă și adevărată indiferent de ce valori de adevăr au propozițiile care o compun se numește tautologie.

Observații

1. Dacă propoziția $(p \rightarrow q)$ este adevărată vom nota $p \Rightarrow q$ și vom spune că p este o condiție suficientă pentru q sau că q este o condiție necesară pentru p .
2. Dacă propoziția $(p \leftrightarrow q)$ este adevărată vom nota $p \Leftrightarrow q$ și vom spune că p este o condiție necesară și suficientă pentru q (și invers).

Exerciții

1. Să se găsească valoarea de adevăr a următoarelor propoziții compuse:
 - a) Dacă temperatura este sub zero grade, atunci apa îngheață.
 - b) Dacă apa fierbe la $100^\circ C$, atunci două corpuri încărcate cu electricitate de semne contrare se atrag.

Observație. Exercițiul anterior ne avertizează că trebuie să facem distincție între implicația logică și succesiunea cauză-efect din lumea fizică.

2. Să se arate că următoarele propoziții sunt tautologii:

- a) $p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$, $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$ (comutativitate).
- b) $(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$, $(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$ (asociativitate).
- c) $p \vee (p \wedge r) \Leftrightarrow p$, $p \wedge (p \vee r) \Leftrightarrow p$ (absorbție).
- d) $p \vee p \Leftrightarrow p$, $p \wedge p \Leftrightarrow p$ (idempotență).
- e) $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$, $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ (distributivitate).
- f) $\overline{p \vee q} \Leftrightarrow \overline{p} \wedge \overline{q}$, $\overline{p \wedge q} \Leftrightarrow \overline{p} \vee \overline{q}$ (legile lui De Morgan).
- g) $\overline{\overline{p}} \Leftrightarrow p$ (principiul dublei negații).

3. Să se arate că următoarele propoziții sunt tautologii:

a) $((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)) \Rightarrow (p \rightarrow r)$ (implicația este tranzitivă).

b) $((p \vee q) \rightarrow r) \Leftrightarrow (p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)$.

c) $(p \wedge (p \rightarrow q)) \Rightarrow q$ (regula modus-ponens).

d) $(p \rightarrow q) \Leftrightarrow (\bar{q} \rightarrow \bar{p})$.

Observație. Echivalența de mai sus se va folosi, spre exemplu, în cadrul observației de la pagina 19, în care se prezintă o caracterizare alternativă a noțiunii de funcție injectivă.

4. Să se arate că $(p \rightarrow q) \Leftrightarrow (q \rightarrow p)$ nu este tautologie.

5. Să se afle negația propozițiilor:

a) $(p \rightarrow q) \rightarrow r$

b) $p \rightarrow (q \rightarrow r)$.

CALCULUL CU PREDICATE

Constante și variabile

Predicate (unare, binare, etc)

Cuantificatorul universal și cuantificatorul existențial

Printre semnele (simbolurile) întâlnite în propozițiile matematicii se află constante și variabile. Astfel se întâlnesc constante precum un număr, semnul de adunare, etc, toate având o semnificație precisă, care rămâne neschimbată în decursul desfășurării raționamentelor. Deosebirea capitală dintre constante și variabile constă în aceea că în timp ce primele au o semnificație prin ele însele, ultimele nu au această semnificație. Spre exemplu propoziția "1 + 2i este un număr real" are un conținut clar (este falsă), dar propoziția "x este un număr real" nu are o semnificație precisă, ea capătă o astfel de semnificație numai după înlocuirea variabilei x.

Definiție. Expresiile de forma $p(x, y, z, ..)$, care atunci când înlocuim variabilele $x, y, z, ..$ cu constante, se transformă în propoziții bine determinate, se numesc predicate unare, binare, etc, după cum avem 1, 2, etc, variabile.

Observație. Operatorii logici studiați permit introducerea unor noi predicate.

De exemplu, pentru predicatele $p(x)$ și $q(x)$, putem considera noile predicate $\bar{p}(x), p(x) \vee q(x), p(x) \wedge q(x)$ etc.

În afara operatorilor logici de mai sus, în matematică, mai intervin și alți operatori, anume cuantificatorul universal, notat \forall , și cuantificatorul

existențial, notat \exists . Prin cuantificatorul \forall se trece de la predicatul $p(x)$ la propoziția $(\forall x) p(x)$, care este falsă numai dacă există o constantă a astfel ca $p(a)$ să fie falsă. Prin cuantificatorul \exists se trece de la predicatul $p(x)$ la propoziția $(\exists x) p(x)$, care este adevărată numai dacă există (cel puțin) o constantă a astfel ca $p(a)$ să fie adevărată. Prin urmare, avem tautologiile $(\forall x) p(x) \Leftrightarrow (\exists x) \overline{p}(x)$ și $(\exists x) p(x) \Leftrightarrow (\forall x) \overline{p}(x)$.

Observații

1. Tautologiile de mai sus arată că prin negare \forall se schimbă în \exists , iar \exists se schimbă în \forall .

2. Avem următoarea proprietate de comutativitate a cuantificatorilor de același tip:

$$(\forall x)(\forall y) p(x, y) \Leftrightarrow (\forall y)(\forall x) p(x, y) \text{ și } (\exists x)(\exists y) p(x, y) \Leftrightarrow (\exists y)(\exists x) p(x, y)$$

sunt tautologii.

3. Fie $p(x)$ și $q(x)$ două predicate unare. Dacă propoziția $(\forall x) (p(x) \rightarrow q(x))$ este adevărată, vom nota $p(x) \Rightarrow q(x)$. A arăta că propoziția de mai sus este falsă înseamnă a găsi o constantă a astfel ca $p(a)$ să fie adevărată, iar $q(a)$ să fie falsă. Unui astfel de exemplu i se spune contraexemplu la propoziția dată. Analog vom spune că $p(x)$ este echivalent cu $q(x)$ și vom scrie $p(x) \Leftrightarrow q(x)$ dacă propoziția $(\forall x)(p(x) \longleftrightarrow q(x))$ este adevărată.

Exerciții

1. Să se arate că oricare ar fi predicatul binar $p(x, y)$, avem $(\exists x)(\forall y) p(x, y) \Rightarrow (\forall y)(\exists x) p(x, y)$. Este adevărată implicația reciprocă?

Observație extrem de importantă. Exercițiul de mai sus arată că ordinea cuantificatorilor logici este extrem de importantă. Acest lucru se poate constata comparând noțiunile de continuitate și continuitate uniformă, de convergență simplă și convergență uniformă pentru șiruri de funcții etc.

ELEMENTE DE TEORIA MULȚIMILOR

Meritul nemuritor al lui Georg Cantor este acela de a se fi hazardat în domeniul infinitului fără a se teme de lupta, interioară sau externă, nu numai cu paradoxurile imaginare, cu prejudecățile larg răspândite, cu sentințele filozofilor, dar și cu opiniile exprimate de mari matematicieni. În acest mod el a creat un nou domeniu – teoria mulțimilor.

F. Hausdorff

Mulțimea ca noțiune primară
Noțiunea de submulțime a unei mulțimi
Egalitatea a două mulțimi
Intersecția și reuniunea a două mulțimi
Mulțimea vidă
Mulțimi disjuncte
Diferența a două mulțimi
Complementara unei mulțimi în raport cu o altă mulțime
Produsul cartezian a două mulțimi

Funcțiile manifestă din când în când o comportare particulară în anumite puncte din domeniul lor de definiție, care în cazurile cele mai importante este un interval, ele posedă acolo "singularități". H. Hankel se ocupase deja cu astfel de chestiuni și expusese principiul său de "condensare a singularităților". Astfel de puncte singulare scot în relief, în intervalul care formează argumentul funcției, anumite "varietăți" sau totalități, care deși constituie numai o parte a punctelor intervalului, pot conține infinit de multe puncte. Se ridică problema structurii unor astfel de varietăți sau mulțimi (de puncte) infinite.

Pe această cale a ajuns Georg Cantor la a sa teorie a mulțimilor. La extinderea teoremei de unicitate a reprezentărilor seriilor trigonometrice în cazul că pentru un număr infinit de valori seria nu este convergentă, el s-a văzut nevoit încă din 1872 să anticipeze anumite discuții, chiar dacă numai "aluzive", care "pot servi să pună în lumină relații ce apar totdeauna atunci când se dau mărimi numerice în număr finit sau infinit". (Este vorba de concepte ca "punct de acumulare", "punct limită", "derivare" la mulțimi de puncte ș.a.).

Totuși, înainte de a ajunge la teoria mulțimilor a lui Cantor, avem de citat unii precursori ai săi. Cele mai vechi considerații care se referă la un "paradox al infinitului" provin chiar din perioada finală a antichității; ele se găsesc în comentariul lui Proclus asupra lui Euclid, însă nu descoperite, ci numai relatate de el, din nefericire fără să numească un nume.

Fundamentele Matematicii, Oskar Becker, Editura Științifică,
București, 1968, paginile 247-248

Mulțimea ca noțiune primară

Conceptul de mulțime este unul de bază în matematică. Toate obiectele matematice se reduc, în ultimă instanță, la acest concept. Vom considera că această noțiune este deja asimilată din anii de liceu. Nu vom încerca să definim noțiunea de mulțime sau să prezentăm axiomele teoriei mulțimilor. Studentul interesat poate vedea modul în care materialul pe care-l vom prezenta poate fi axiomatizat, consultând următoarele lucrări: *Paul Halmos, Naive Set Theory*, Springer - Verlag, 1974; *Paul Bernays (with a historical introduction by Abraham Fraenkel), Axiomatic set theory*, North-Holland Publishing Company, 1991. Prin urmare vom prezenta aici numai câteva elemente de teoria naivă a mulțimilor, teorie ale cărei baze au fost puse de către matematicianul german Georg Cantor. În timp au fost puse în evidență o serie de slăbiciuni ale teoriei mulțimilor, așa cum a fost ea dezvoltată de către Cantor. Pentru a remedia această situație, o nouă teorie a mulțimilor a fost elaborată de către Ernst Zermelo și Adolf Fraenkel și dezvoltată de către Kurt Gödel și Paul Cohen (pentru detalii, se poate consulta lucrarea **Kurt Gödel (1906-1975)**, de *Ralf Schindler*, *Gazeta Matematică*, seria A, nr.1, 2008, paginile 72-76).

Notă istorică. *Georg Cantor* (1845-1918) s-a născut la Sankt Petersburg. A studiat la Universitatea din Berlin, cu Weierstrass, Kummer și Kronecker, unde devine prietenul lui Schwarz. Aici preocupările lui privesc teoria numerelor. În 1869 primește un post la Universitatea din Halle. Sub influența lui Heine, cercetările lui Cantor se vor îndrepta către analiza matematică. În 1870 el va demonstra unicitatea reprezentării unei funcții cu ajutorul unei serii trigonometrice (problemă care, în prealabil, a fost studiată, fără succes, de mulți matematicieni celebri, printre care Heine, Dirichlet, Lipschitz și Riemann). În 1872 este promovată ca profesor extraordinar la Universitatea din Halle. În același an, în decursul unei excursii în Elveția, îl va întâlni pe Dedekind, cu care va avea o prietenie solidă. Tot în 1872, Cantor publică un articol privind seriile trigonometrice, în care definește numerele reale în termeni de șiruri convergente de numere raționale. În 1873 Cantor a arătat că mulțimea numerelor raționale (precum și mulțimea numerelor algebrice) este numărabilă. În 1874 publică un articol în care arată că mulțimea numerelor reale nu este numărabilă. Mai mult, într-o scrisoare din anul 1877 către Dedekind, arată că între punctele intervalului $[0, 1]$ și punctele din \mathbb{R} există o corespondență bijectivă. Cantor a fost surprins de această descoperire, fapt care l-a făcut să exclame: "Deși am demonstrat acest lucru, nu-l pot crede". În 1878 publică un articol în care apare în mod riguros noțiunea de corespondență bijectivă. Între 1879 și 1884 publică o serie de șase arti-

cole în *Mathematische Annalen*, în care se prezintă o introducere în teoria mulțimilor. Ideile sale prezentate aici au fost întâmpinate cu ostilitate de către mulți matematicieni. În 1879, la sugestia lui Heine, este promovată la gradul de profesor. În 1896 el îi scrie lui Hilbert, prezentându-i paradoxurile pe care le-a descoperit în cadrul teoriei mulțimilor. Moare în 1918 într-un azil de boli mentale.

Cantor rămâne în istoria matematicii ca fondatorul teoriei moderne a mulțimilor și ca cel care a introdus conceptul de număr infinit (prin introducerea numerelor cardinale). Până la el infinitul era, în matematică, un subiect tabu. Conform lui Gauss, infinitul putea fi utilizat numai ca "un fel de a spune" care nu are valoare matematică. Ideile lui Cantor au determinat reevaluarea fundamentelor tuturor ramurilor matematicii și au dat acesteia forma modernă de astăzi.

Noțiunea de submulțime a unei mulțimi

$x \in A$ înseamnă că x este un element al lui A ; se mai spune că x aparține lui A sau că mulțimea A conține elementul x . $x \notin A$ înseamnă că x nu aparține lui A .

Definiție. Fie A și B două mulțimi. Spunem că A este o submulțime a lui B dacă orice element al lui A este și element al lui B . În acest caz scriem $A \subseteq B$. Dacă $A \subseteq B$, dar există un element al lui B care nu este element al lui A , spunem că A este o submulțime proprie a lui B și scriem $A \subset B$.

Egalitatea a două mulțimi

Definiție. Două mulțimi A și B se numesc egale dacă conțin aceleași elemente. În acest caz scriem $A = B$.

Observație. $A = B \Leftrightarrow (A \subseteq B \text{ și } B \subseteq A)$.

Intersecția și reuniunea a două mulțimi; Mulțimea vidă; Mulțimi disjuncte

Definiție. Dacă A și B sunt două mulțimi, atunci intersecția lor, notată $A \cap B$, este mulțimea tuturor elementelor care aparțin ambelor mulțimi.

Definiție. Dacă A și B sunt două mulțimi, atunci reuniunea lor, notată $A \cup B$, este mulțimea tuturor elementelor care aparțin cel puțin uneia dintre cele două mulțimi.

Observații

1. Avem $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ și } x \in B\}$ și $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ sau } x \in B\}$.